

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАНА РАСКРОЯ ОБЛОЖЕК  
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ТИРАЖА**

*Анализируется проблема раскроя материалов при производстве полиграфической продукции. Строится математическая модель формирования плана раскроя обложек для печати дополнительного тиража печатного издания.*

*The problem of cutting materials by manufacturing printing production is analyzed. A mathematical model of formation of the cutting plan for covers for printing an additional print run of a printed edition is being constructed.*

**Введение**

Проблема эффективного раскроя материалов актуальна при решении многих научных и прикладных задач [1 — 4]. В задачах указанного класса необходимо найти размещение заданного набора двумерных объектов в заданной области, доставляющее экстремальное значение одному или нескольким критериям, при соблюдении набора ограничений.

Задачи раскроя, возникающие в различных областях, обладают рядом особенностей. Они связаны со спецификой раскраиваемого материала, с технологией его обработки и т. д. Учет указанных особенностей приводит к необходимости разработки новых и модификации известных математических моделей и методов для решения различных прикладных задач раскроя материалов.

Одной из областей, в которых традиционно необходимо решение задач раскроя, является производство полиграфической продукции — газет, книг и т. д. [5]. Специфика предметной области требует анализа и учета особенностей технологии раскроя листов и рулонов бумаги, картона и сопутствующих материалов. Одним из условий эффективного функционирования полиграфических предприятий является разработка и реализация эффективных планов раскроя материалов при производстве полиграфической продукции.

**Целью** настоящей статьи является построение математической модели формирования плана раскроя обложек для печати дополнительного тиража печатного издания.

**Особенности выпуска печатной продукции**

При создании систем автоматизированного проектирования (САПР) важной задачей является выделение типовых производственных задач, построение их математических моделей, разработка алгоритмов и методов решения поставленных задач. На основе анализа производственных систем и протекающих в них процессов очерчивается круг еще нерешенных или требующих оптимизации задач, для которых на базе имеющихся методов разрабатываются новые пути решения.

Ввиду того, что техническая реализация процессов, протекающих в производственной системе, зависит напрямую от технологии, используемой на производстве, центральное место в настоящее время занимает формализация процессов принятия решения, поскольку именно этот процесс является многократно повторяющимся этапом любой целенаправленной деятельности. В [7] утверждается, что именно этот факт влечет за собой теоретический и практический интерес к синтезу универсальной, инвариантной к предметной области, формальной математической модели принятия решения.

Эффективность работы производственного процесса напрямую связана с принимаемыми решениями, эффективность принимаемых решений зависит от объема информации, который может обработать принимающий решение индивидум. В то же самое время для вычислительной системы объем обрабатываемой информации не представляет особой важности, но во главу становится выделение из всех имеющихся решений множества допустимых, а из области допустимых — выбор оптимального или наилучшего в заданном толковании. Иными словами, основным является принятие решения, исходя из заданных условий и желаемого результата.

Так, в производственном процессе изготовления печатной продукции решено множество проблем, связанных с технической и технологической стороной процесса. Однако мало внимания уделяется процессам оптимизации и формализации интеллектуальной деятельности человека внутри производственного процесса. Не секрет, что скорость обработки информации в вычислительной системе гораздо ниже скорости протекающих в мозге человека процессов, тем не менее, точность вычислений и скорость выбора оптимального решения при правильном алгоритме выбора в вычислительной системе значительно выше.

Автоматизация интеллектуальной деятельности в процессе подготовки книжной продукции рассмотрена в [5], где затронут вопрос автоматизации процесса журнальной (газетной) верстки. Существует множество средств автоматизации верстки, но сам процесс производства рассматривается только с технологической стороны. Вопросы, связанные с размещением работ на спуски для печати, не рассматриваются, так как акцент делается на внутренний блок изданий, который, в свою очередь, размещается стандартно и, как правило, не содержит отхода бумаги. Но если обратить внимание на размещение на спуски обложек, особенно 7БЦ (твердый переплет), то дело выглядит совсем иначе. Практически невозможно напечатать обложки этого типа без отхода бумаги. Однако, если рассматривать вариант размещения обложек

7БЦ разного размера на один спуск, то, возможно, найдется такой вариант размещения обложек, при котором отход бумаги будет минимальным или будет отсутствовать полностью.

Отход бумаги напрямую влияет на себестоимость печатаемого издания. Уменьшив эту статью расхода, предприятие может выбрать два следующих направления: уменьшить розничную стоимость напечатанного издания либо увеличить свой доход, оставив ценовую политику неизменной.

При размещении обложек на спуски особую роль играет тираж. Тираж — количество экземпляров какого-либо печатного издания одного выпуска. Существует первый тираж, т.е. печать продукции производится впервые и, как правило, носит пробный характер (опробование новой технологии, анализ продаж продукта и т. п.), и дополнительный, когда печать производится повторно после продажи первого тиража.

В условиях нынешней экономической ситуации более выгодным является выпуск допечаток (дополнительный тираж). Связано это с тем, что затраты на дополнительный тираж значительно меньше затрат на подготовку и печать нового продукта. Как при первом тираже, так и при дополнительном, существует необходимость формировать план раскроя, который определяет, какие карты раскроя и в каком количестве необходимо напечатать для получения заданного тиража изданий.

Задача формирования рационального плана раскроя для вывода обложек дополнительного тиража усложняется тем, что обложки, которые следует разместить на существующие карты раскроя, имеют разные объемы тиражей. Объясняется это разным спросом на допечатываемую продукцию.

Специалисту производства необходимо сформировать такой план раскроя, который позволит напечатать разные объемы тиражей продукции, используя минимальное количество карт раскроя, обеспечит минимальное количество отхода бумаги и минимизирует затраты на печать продукции.

Построение математической модели

Для формализации задачи введем следующие понятия. Совокупность обложек, размещенных по некоторому правилу на одном спуске, называется картой раскроя. Под планом раскроя будем понимать количество отпечатков, сделанных по каждой карте раскроя.

Обозначим  $n$  — количество допустимых планов раскроя, формирующих допустимое множество решений;

$m$  — количество имеющихся карт раскроя;

$C = \{c_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  — цена одного отпечатка, сделанного по  $j$ -й карте раскроя;

$t$  — количество наименований обложек, определенных к допечатке;

$P = \{p_k, k = 1, 2, \dots, t\}$  — тираж  $k$ -го наименования обложки;

суммарный тираж по всем  $t$  наименованиям обложек равен:  $P^* = \sum_{k=1}^t p_k, (k = 1, 2, \dots, t)$ .

$x_j^i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$  — количество отпечатков, раскроенных по  $j$ -й карте раскроя в  $i$ -м плане раскроя — переменные задачи;

$B = \{b_j^k, k = 1, 2, \dots, t; j = 1, 2, \dots, m\}$  — количество обложек  $k$ -того наименования, входящих в  $j$ -тую карту раскроя;

$E_k^i$  — фактический тираж  $k$ -го наименования обложки, сделанный по всем  $m$  картам раскроя в  $i$ -м

плане раскроя:  $E_k^i = \sum_{j=1}^m b_j^k \cdot x_j^i, (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, t)$ ;

$E^i$  — суммарный фактический тираж по всем  $t$  наименованиям обложек:  $E^i = \sum_{k=1}^t E_k^i = \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m b_j^k \cdot x_j^i$ ;

$S_{(omn)j}$  — площадь  $j$ -й карты раскроя;

$\sum_{k=1}^t S_{(b_j^k)_j}$  — общая площадь обложек  $k$ -го наименования, входящих в  $j$ -ю карту раскроя.

Формируемый план раскроя должен удовлетворять следующим ограничениям.

Тираж, заданный по допечаткам, должен совпадать с тиражом, полученным после использования оптимального плана раскроя:

$$P^* = E^i. \quad (1)$$

Данное условие не всегда является выполнимым. Поэтому, для формирования допустимой области решений, используют условие получения количества экземпляров обложек не меньше запланированного [2]:

$$\sum_{j=1}^m b_j^k \cdot x_j^i \geq p_k \quad (2)$$

либо получение количества экземпляров обложек в заданных интервалах [2]:

$$p_{k \min} \leq \sum_{j=1}^m b_j^k \cdot x_j^i \leq p_{k \max} \quad (3)$$

С учетом введенных ограничений сформируем область допустимых решений  $X$ .  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ , где  $x^i$  —  $i$ -й план раскроя ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)$ , где  $x_j^i$  — количество отпечатков, раскrojенных по  $j$ -й карте раскроя в  $i$ -м плане раскроя ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Эффективность плана раскроя оценивается следующими критериями:

1. Минимальное количество отхода бумаги.

$$S^i = \sum_{j=1}^m \left( S_{(omn)j} - \sum_{k=1}^t S_{(b_j^k)_j} - S_{(mex. \text{нужд})j} \right) \cdot x_j^i \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $S^i$  — общий отход бумаги в  $i$ -м плане раскроя;

2. Количество карт раскроя, необходимых для печати всего объема заданных тиражей

Каждая карта раскроя соответствует набору фотоформ, с которых впоследствии происходит печать тиража. Таким образом, чем меньшее количество карт раскроя задействовано в плане раскроя, тем меньшие затраты понесет производство при изготовлении фотоформ и тем меньшим окажется стоимость самого плана раскроя.

$$Q^i = \sum_{\substack{j=1 \\ x_j^i \neq 0}}^m \frac{x_j^i}{x_j^i} \rightarrow \min, \quad (5)$$

где  $Q^i$  — количество карт раскроя, которые печатаются хотя бы один раз согласно  $i$ -му плану раскроя.

3. Количество отпечатков, сделанных по каждой карте раскроя.

Стоимость одного отпечатка, сделанного по  $j$ -й карте раскроя, напрямую зависит от общего количества отпечатков, сделанных по этой карте раскроя. Другими словами, чем больше отпечатков будет сделано по заданной карте раскроя, тем меньшей будет стоимость одного отпечатка.

$$x_j^i \rightarrow \max, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

4. Стоимость плана раскроя.

В стоимость плана раскроя входят все затраты, связанные с печатью заданного количества отпечатков по соответствующим картам раскроя.

$$C^i = \sum_{j=1}^m x_j^i \cdot c_j \rightarrow \min. \quad (7)$$

5. Стоимость отхода бумаги в плане раскроя.

Уместной при определении оптимального плана раскроя будет оценка того, сколько производство платит за макулатуру, т. е. ту часть бумаги, на которой не находятся технические метки, необходимые для правильности совмещения фотоформ, правильной печати цветности, и собственно сами обложки.

$$C_{omxod}^i = \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\left( S_{(omn)j} - \sum_{k=1}^t S_{(b_j^k)_j} - S_{(mex. \text{нужд})j} \right)}{\left( S_{(omn)j} - S_{(mex. \text{нужд})j} \right)} \cdot x_j^i \cdot c_j \right] \rightarrow \min, \quad (8)$$

где  $S_{(mex. \text{нужд})j}$  — площадь технических нужд в  $j$ -й карте раскроя.

6. Доля стоимости отхода бумаги в общей стоимости тиража.

Так как в стоимость плана раскроя входят все затраты на печать по заданным картам раскроя, то целесообразным будет уменьшить долю цены отхода бумаги в сформированном плане раскроя.

$$\alpha = \frac{C_{omxod}^i}{C^i} \rightarrow \min. \quad (9)$$

Необходимо разработать модель нахождения рационального плана раскроя для вывода обложек на дополнительные тиражи, который удовлетворял бы одному из ограничений (1) – (3) и доставлял экстремальные значения критериям (4) – (9).

Таким образом, задача состоит в нахождении экстремума векторного критерия  $F(x) = (S^i(x), m(x), x_j^i, C^i(x), C_{omxod}^i(x), \alpha(x))$  на множестве допустимых решений  $X$ :

$$F(x) \rightarrow \underset{x \in X}{extr}, \quad (10)$$

а ее решение

$$x^0 = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} F(x). \quad (11)$$

Процесс решения многокритериальной задачи (10)—(11) включает следующие этапы.

1. Построение множества допустимых решений  $X$ . Данный этап связан с формированием допустимых планов раскроя и может быть реализован на основе комбинаторных методов генерации разбиений целых чисел.

2. На этом этапе производится выбор наилучшего плана раскроя по множеству критериев.

Для данного класса задач разработаны различные методы анализа. Один класс методов связан с выделением из множества  $X$  неулучшаемого подмножества вариантов по Парето (области компромиссов), оптимальных вариантов (слабо эффективных) по Слейтеру, оптимальных (строго эффективных) вариантов по Смейлу [6].

Другой класс методов ориентируется на сведение многокритериальной экстремальной задачи к однокритериальной, построение многофакторных оценок и выбор на их основе наилучшего варианта плана раскроя [7]. В результате сведения многокритериальной задачи к однокритериальной одним из известных методов [7] формируется обобщенный критерий эффективности. Определение экстремума обобщенного критерия на множестве допустимых решений  $X$  может быть проведено методами целочисленной оптимизации [8].

### Выводы

Построенная в работе математическая модель формирования плана раскроя обложек для печати дополнительного тиража печатного издания может быть использована в составе математического обеспечения интеллектуальных систем автоматизации издательской работы. Эффект от использования предложенной математической модели может быть оценен количественно благодаря сформированной системе критериев оценки эффективности планов раскроя.

### Список использованных источников

1. Dychoff H. A typology of cutting and packing problems / H. Dychoff // *European Journal of Operations Research*. – 1990. – № 44. – P. 145 – 159.
2. Грицюк Ю. І. Оптимізація технологічного процесу розкрою плитних деревних матеріалів на меблевій заготовці : у 2 кн. Кн. 1 : [монографія] / Грицюк Ю. І. – К. : Основа, 2005. – 484 с.
3. Грицюк Ю. І. Регулярне розміщення прямокутних об'єктів вздовж смуг односторонньо обмеженої стрічки : [монографія] / Грицюк Ю. І. – Львів : Вид. дім. «Панорама», 2002. – 220 с.
4. Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов, применение АСУ / Мухачева Э.А. – М. : Машиностроение, 1984. – 176 с.
5. Strecker T. Automatic layouting of personalized news paper pages / T. Strecker, L. Hennig // *Operations Research Proceedings 2008 : selected papers of the Annual International Conference of the German Operations Research Society*. – University of Augsburg, 2008. – P. 469 – 474.
6. Козерацкая Л.Н. Задачи целочисленного программирования с векторным критерием. Параметрический анализ и исследование устойчивости / Л.Н. Козерацкая, Т.Т. Лебедева, Т.И. Сергиенко // *ДАН СССР*. – 1989. – Т. 307, № 3. – С. 527 – 529.
7. Овезгельдыев А.О. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации / Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э. – К. : Наук. думка, 2002. – 164 с.
8. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.